

Σύστημα εξυπηρέτησης Erlang

Ήταν συστήματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα ο χρόνος εξυπηρέτησης των πελατών καθώς και ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών αφίξεων ήταν $ΕΚΘ(μ)$ και $ΕΚΘ(λ)$ αντίστοιχα.

Αυτό μας έδινε τη δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε την ιδιότητα της "αμνησίας" της εκθετικής και να αντιστοιχίσουμε τα μοντέλα με ανεξίτητες-διαδικασίες γεννήσεων-θανάτων με Μαρκοβιανές ιδιότητες. Ο Erlang θεωρησε για πρώτη φορά ότι ο χρόνος μεταξύ 2 διαδοχικών αφίξεων ή ο χρόνος εξυπηρέτησης ή και τα δύο δεν ακολουθούν την εκθετική αλλά την Γάμμα $(τ, \frac{1}{τλ})$

Θεωρώ την Γάμμα τω μέση τιμή: $τ \frac{1}{τλ} = λ^{-1}$

Η σπη της Γάμμα $(τ, \frac{1}{τλ})$ είναι $f(t) = \frac{t^{τ-1} e^{-t(τλ)}}{(\frac{1}{τλ})^τ Γ(τ)}$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Γάμμα } (α, β) \text{ σπη} \\ f_X(x) = \frac{x^{α-1} e^{-x/β}}{β^α Γ(α)}, x \geq 0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow f(t) = \frac{(\tau\lambda)^\tau t^{\tau-1} e^{-t(\tau\lambda)}}{\Gamma(\tau)}, t \geq 0$$

όπου τ θετικός ακεραίος

Γιατί να προτιμήσει κάποιος αυτήν?

Έχει δύο παραμέτρους και κάνει καλύτερη προσαρμογή

Όταν $\alpha=1$
 μένει $\frac{1}{\beta} e^{-x/\beta} \in \text{εκθ}(1/\beta)$
 άρα Γάμμα(1, β)
 Έστω $X \sim \text{εκθ}(\lambda)$
 $Y \sim \text{Γάμμα}(\alpha, \beta)$, α, β να είναι
 $\tau. \omega \ E(Y) \equiv E(X)$ δηλ $\alpha\beta = \frac{1}{\lambda}$
 για να γίνει αυτό
 $\alpha = \tau$ και $\beta = \frac{1}{\tau\lambda}$

Η κατανομή $\Gamma(\tau, \frac{1}{\tau\lambda})$ δεν έχει την ιδιότητα της αμνηστίας

Όμως αποδεικνύεται ότι αν $T \sim \Gamma(\tau, \frac{1}{\tau\lambda})$ και $T_i \overset{\text{ανεξ}}{\sim} \Gamma(1, \frac{1}{\tau\lambda}) \equiv \text{εκθ}(\tau\lambda)$

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $T_1, T_2, \dots, T_\tau$ ανεξ και ισον. τ.μ με $\text{εκθ}(\tau\lambda)$

Τότε $\sum_{i=1}^{\tau} T_i \sim \text{Γάμμα}(\tau, \frac{1}{\tau\lambda})$

ΑΠΟΔ
 Η απόδειξη αυτή προκύπτει με μέθοδο της ροπογεννήτριας

$$m_T(t) = E(e^{tT}) = E(e^{t(T_1 + \dots + T_\tau)})$$

$$= E(e^{tT_1} \dots e^{tT_\tau})$$

$$\overset{\text{ανεξ}}{=} E(e^{tT_1}) \dots E(e^{tT_\tau})$$

$$\overset{\text{ισον}}{=} (E(e^{tT_1}))^\tau$$

$$m_{\sum_{i=1}^{\tau} T_i}(t) = E\left(e^{t \sum_{i=1}^{\tau} T_i}\right) \overset{\text{ανεξ}}{=} m_{T_1}(t) m_{T_2}(t) \dots m_{T_\tau}(t)$$

ισόνομες $(m_{T_1}(t))^\tau$

Η ροπογεννήτρια της Εκθετικής Εκθ(τλ) είναι $\frac{\tau\lambda}{\tau\lambda - t}$

άρα $m_{\sum_{i=1}^{\tau} T_i}(t) = \left(\frac{\tau\lambda}{\tau\lambda - t}\right)^\tau = \left(\frac{\tau\lambda}{\tau\lambda(1 - \frac{t}{\tau\lambda})}\right)^\tau = \left(1 - \frac{1}{\tau\lambda} t\right)^{-\tau}$

που είναι η ροπογεννήτρια της Γάμμα(τ, $\frac{1}{\tau\lambda}$)

Επομένως η Γάμμα(τ, $\frac{1}{\tau\lambda}$) είναι ουσιαστικά άθροισμα
 τ το πλήθος ανεξττων Εκθ(τλ) με σ.π.η

$$f(x) = \tau\lambda e^{-\tau\lambda x}, x \geq 0$$

Η προηγούμενη ιδιότητα οδηγεί στη μέθοδο των φάσεων.

Η μέθοδος αυτή υποθέτει ότι ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών αφίξεων ή ο χρόνος εξυπηρέτησης ή και οι δύο χωρίζονται σε τ φάσεις, με τον χρόνο σε κάθε φάση να ακολουθεί ^{(ανεξάρτητο) και} εκθετική και έτσι να διατηρείται η "αμνησία".
6 $E_k(\tau)$

Σύστημα $M/E_r/1/\infty (F_c F_s)$ FIFO

Θεωρώ ένα σύστημα εξυπηρέτησης με 1 υπόλληλο απεριόριστο χώρο αναμονής, στο οποίο σύστημα οι πελάτες έρχονται με $P(\lambda)$ και ο χρόνος εξυπηρέτησης είναι

$$\begin{aligned} \text{Erlang} &\equiv \text{Γαίμμα}(\tau, \frac{1}{\tau_\mu}) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{\tau} E_{k\theta}(\tau_i) \end{aligned}$$

Ορίσω $f(t)$ την τ_μ που παριστάνει τον αριθμό των πελατών στο σύστημα τη χρονική στιγμή t .

Η $\{f(t): 0 \leq t < \infty\}$ δεν έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα, διότι το μέλλον εξαρτάται από το παρόν αλλά και το χρόνο που έχει απομείνει στον πελάτη που εξυπηρετείται

Καθώς για να διατηρηθεί η "αμνησία" θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των φάσεων δηλ.

Χρόνος εξυπηρέτησης $\rightarrow \tau$ ανεξ/τες $E_{k\theta}(\tau_i)$
Erlang
Γαίμμα($\tau, \frac{1}{\tau_\mu}$)

Θα συμβολίσουμε με $m(t)$ τον αριθμό των φάσεων που υπάρχουν στο σύστημα τη χρονική στιγμή t . (Εκκρεμεί η εξυπηρέτησή τους)

Ποια η σχέση που συνδέει τον αριθμό $f(t)$ και $m(t)$?

Έστω $f(t)$ οι πελάτες και ο εξυπηρετούμενος πελάτης βρίσκεται στην i -οστή από τις τ διαθέσιμες φάσεις

$$\text{Τότε: } m(t) = [f(t)-1] \cdot \tau + 1 (i+1)$$

Εκφράζει το πλήθος πελατών στην ουρά (κάθενας από αυτούς έχει τ φάσεις μπροστά του)

αυτός που εξυπηρετείται

αφού είναι στην i φάση του έχουν μείνει $\tau - i + 1$

Επομένως $m(t) = \tau f(t) - i + 1$

Έστω τώρα $q_j(t) = P[m(t)=j | m(0)=0]$

αρχικά μηδέν φάσεις

Τότε $P_n(t) = P[\text{να έχω } n \text{ πελάτες στην χρονική στιγμή } t]$

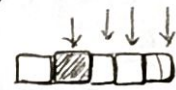
$$= P \left[\begin{array}{l} (n-1) \text{ πελάτες στην ουρά} \\ \text{και ο εξυπηρετούμενος στην } 1^{\text{η}} \text{ φάση} \\ (n-1) \text{ πελάτες στην ουρά και ο εξυπηρετούμενος στην } 2^{\text{η}} \text{ φάση} \\ \vdots \\ (n-1) \text{ πελάτες στην ουρά και ο εξυπηρετούμενος στην } \tau\text{-οστή φάση} \end{array} \right]$$

Όταν όμως $(n-1)$ πελάτες στην ουρά και ο εξυπηρετούμενος στην i φάση τότε

$$m(t) = \tau(n-1) + i$$

αφού $f(t) = n$ (πελάτες στο σύστημα)

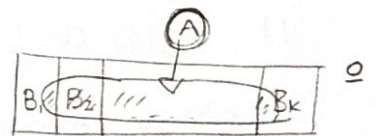
πχ $f(t)=7, m(t)=7$
 $f(t)=7 / 6$ στην ουρά και 1 στην εξυπηρ.



Την εξυπηρ. την χωρίζω σε $\tau=5$ φάσεις

Ο πελάτης που εξυπ. είναι στην φάση 2.

$$m(t) = 6 \cdot 5 + (5 - 2 + 1) = 34 \text{ φάσεις}$$



$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + \dots + P(A|B_k)P(B_k) = P(A \cap B_1) + \dots + P(A \cap B_k)$$

Άρα $P_n(t) = q_{\tau(n-1)+1}(t) + \dots + q_{\tau(n-1)+\tau}(t) = P(m(t) = \tau(n-1)+1) + P(m(t) = \tau(n-1)+2) + \dots +$

$$= \sum_{j=\tau(n-1)+1}^{\tau n} q_j(t)$$

Άρα προσδιορίζοντας τα $q_j(t)$ θα προσδιοριστούν οι $P_n(t)$

Προσδιορισμός $q_j(t) = P[m(t) = j \mid m(0) = 0]$



$m(t)$ αριθμός φάσεων.

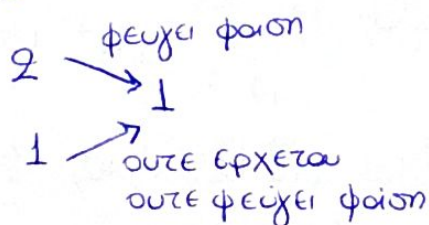


Τέλειωσε φάση

$\leadsto \text{ΕΚΘ}(\tau\mu)$

$$q_0(t+dt) = q_0(t) [1 - \lambda dt + o(dt)] + q_1(t) [\tau\mu dt + o(dt)]$$

δεν ήρθε φάση



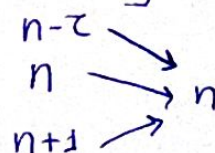
(*) Παρόμοια ισχύει για $2, \dots, \tau-1$.

$0 \not\rightarrow 1$ γιατί αν είναι 0 φάσεις τότε με άφιξη θα πάω από 0 σε τ

$$q_1(t+dt) = q_1(t) [1 - (\lambda + \tau\mu) dt + o(dt)] + q_2(t) [\tau\mu dt + o(dt)]$$



(*) φάση ισχύει για $n = 2, \dots, \tau-1$



$$q_n(t+dt) = q_n(t) \left[1 - (\lambda + \mu) dt + O(dt) \right] + q_{n+1}(t) \left[\mu dt + O(dt) \right] + q_{n-2}(t) \left[\lambda dt + O(dt) \right]$$

Επομένως προκύπτει:

$$\frac{dq_0(t)}{dt} + \lambda q_0(t) = \mu q_1(t)$$

$$\frac{dq_1(t)}{dt} + (\lambda + \mu) q_1(t) = \mu q_2(t) \quad (*)$$

$$\frac{dq_n(t)}{dt} + (\lambda + \mu) q_n(t) = \mu q_{n+1}(t) + \lambda q_{n-2}(t)$$